Bref, si l'on choisit N tq $\sum_{n=N+1}^{+\infty} |z_n| \leq \varepsilon$,

VIII Applications linéaires continues

Données: $(E, \|\ \|_E)$ et $(F, \|\ \|_F)$

<u>Th</u>: Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On a: u est continue $\Leftrightarrow$ $\exists C > 0\ \forall x \in E$ $\|u(x)\|_F \leq C\|x\|_E$

D/ (⇑) $\forall x, x' \in E^2$, $\|u(x) - u(x')\| = \|u(x-x')\|_F \leq C\|x-x'\|_E$

donc u est C-lip donc $\mathcal{C}^0$

(⇓) On suppose u $\mathcal{C}^0$ en 0, on va mq u est bornée sur $\overline{B}(0,1)$

Soit $r > 0$ tq $\forall x \in \overline{B}(0,r)$, $\|u(x)\| \leq 1$ $(\varepsilon = 1)$.

Soit $\left| \begin{array}{l} x \in E \setminus \{0\} \\ \|x\| = 1 \end{array} \right.$, il vient $rx \in \overline{B}(0,r)$, donc $\|u(rx)\| \leq 1$

$\Rightarrow r\|u(x)\| \leq 1$

$\Rightarrow \|u(x)\| \leq \frac{1}{r}$

Enfin: Si $x \in E \setminus \{0\}$, $\frac{x}{\|x\|} \in \overline{B}(0,1)$ donc $\left\| u\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq C$

càd $\|u(x)\| \leq C\|x\|$

En fait, on a la

<u>Proposition</u>: Les props suivantes sont équivalentes ($u \in \mathcal{L}(E,F)$)

1. u est continue
2. u est $\mathcal{C}^0$ en 0
3. u est $\mathcal{C}^0$ en au moins 1 point
4. u est lipsch
5. u est bornée sur $\overline{B}(0,1)$
6. u est bornée sur $S(0,1)$

7) u est bornée sur une boule au moins

S/ 1 $\Rightarrow$ 2 $\Rightarrow$ 3 OK, 3 $\Rightarrow$ 2 : additivité

Soit a un pt de $\mathcal{C}^0$ de u, on a $\exists \lim_{h \to 0} \| u(a+h) - u(a) \| = 0$

donc u est $\mathcal{C}^0$ en 0.

On ~~[illegible]~~ Mq (1) $\Leftrightarrow$ (5) ;

(5) $\Rightarrow$ (6) clair

$\rightarrow$ (5) $\Leftrightarrow$ (6) mais si (6) est valide (2) $\Rightarrow$ (4) Th

si $x \in \overline{B}(0,1) \setminus \{0\}$ $x = \|x\| \frac{x}{\|x\|}$ donc $\|u(x)\| = \underbrace{\|x\|}_{\leq 1} \underbrace{\left\| u\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\|}_{\leq M}$

RMQ) $\sup_{x \in B(0,1)} \|u(x)\| = \sup_{x \in S(0,1)} u(x)$

7 $\Rightarrow$ 6. On suppose $\|u(x)\| \leq M$ pour $x \in \overline{B}(a,r)$, $r>0$

Soit $y \in S(0,1)$; $x = a + ry \in \overline{B}(a,r)$, donc $\|u(x)\| \leq M$

et de ce fait $\|u(y)\| = \left\| \frac{1}{r} (u(a+ry) - u(a)) \right\| \leq \frac{1}{r} (\|u(x)\| + \|u(a)\|)$

$\leq \frac{2M}{r}$

NORME ;

III/

Th-Déf : Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, continue, les nombres suivants sont égaux

1) $\sup_{x \in \overline{B}(0,1)} \|u(x)\|$ 2) $\sup_{x \in S(0,1)} \|u(x)\|$

3) $\inf \{C \geq 0 \mid \forall x \in E, \|u(x)\| \leq C\|x\|\}$

De plus, l'inf dans 3 est atteint | norme d'opérateur (subordonnée)

subordonnée de u est $\|u\| =$ valeur commune de 1), 2), 3)

$\sup\limits_{x \in \bar{B}(0,1)} \|u(x)\| \geq \sup\limits_{x \in S(0,1)} \|u(x)\|$ car $S(0,1) \subset \bar{B}(0,1)$

Si $x \in \bar{B}(0,1)$ $\|u(x)\| = \|x\| \left\| u\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|$

$\leq \underbrace{\|x\|}_{\leq 1} \sup\limits_{x \in S(0,1)} \|u(x)\|$

→ 1) et 2) sont égaux.

* Si C vérifie $\forall x \in E$ $\|u(x)\| \leq C\|x\|$, il vient $\sup\limits_{x \in S(0,1)} \|u(x)\| \leq C$

Posons ~~sup~~ $C_0 = \sup\limits_{x \in S(0,1)} \|u(x)\|$

pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\left\|u\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq C_0$

$\|u(x)\| \leq C_0 \|x\|$

C_0 est un rapport de lip → c'est le plus petit

Prop: $\||\ \ \||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$ (continue) $\left\{ \begin{array}{l} \text{c'est la norme} \\ \text{sup sur } \bar{B}(0,1) \end{array} \right.$

$\||u\|| = 0 \Rightarrow u = 0$ car $C_0 = 0$

RM: Si E est de dim finie, $\||u\||$ est atteinte car $\bar{B}(0,1)$ est compacte.

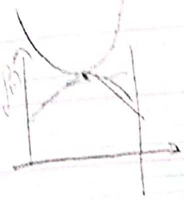
Prop : 1) Si $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}_c(F,G)$

$|||v \circ u||| \leq |||v||| \, |||u|||$

2) $||| \ |||$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{L}_c(E)$

D/ 1) Soit $x \in E$. Il vient $\|v \circ u(x)\|_G \leq |||v||| \, \|u(x)\|_F$

$\leq |||v||| \, |||u||| \, \|x\|_E$



Avec la déf : $|||v \circ u||| \leq |||u||| \, |||v|||$

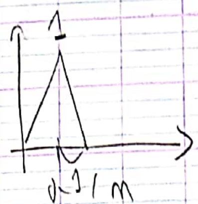
Pratique : $|||u||| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$ $\left\{ \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \left\|u\left(\frac{x}{\|x\|}\right.\right.\right.$

Exemple : ① $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, $a \in [0,1]$, $u : f \mapsto f($

$\mathcal{C}^{0/1}$ pour $\| \ \|_\infty$, $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$?

S/ $\|u(f)\| = |f(a)| \leq \|f\|_\infty$

$\| \ \|_1$ ... on veut comparer $f(a)$ et $\int_0^1 |f|$



$\frac{\|u(f_n)\|}{\|f_n\|} = \frac{n}{2} \to +\infty$ non borné

$\| \ \|_2$: idem.

② $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ $\|f\|_\infty$, $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ $F = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ avec $\| \ \|_\infty$

$u : \begin{pmatrix} E \to F \\ f \to f' \end{pmatrix}$

E est muni de $\| \|_\infty$: $f_n(x) = e^{nx}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{\|u(f_n)\|_\infty}{\|f_n\|_\infty} = \frac{n e^n}{e^n} = n \to \infty$$

E muni de $\| \|_\infty + \|( )'\|_\infty$: $\|u(f)\|_\infty \leq N(f)$, u est $\mathcal{C}$

③ ds ① calculer $|||u|||$ pour $\| \|_\infty$

On a $|u(f)| \leq \|f\|_\infty$ donc $|||u||| \leq 1$ } majorant

Or $1 \in S(0,1)$ et $|u(1)| = 1$ donc $|||u||| = 1$ } atteint

④ $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. $u(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} f\left(\frac{1}{2^n}\right)$

Mq u est $\mathcal{C}^0$, mais que $|||u|||$ n'est pas atteinte

S/ $|u(f)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \|f\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$ | $|||u||| \leq 2$

$f_N\left(\frac{1}{2^n}\right) = (-1)^n$, $n = 0 \dots N$

f_N APM $\|f_N\| \leq 1$

$\|f_N\|_\infty = 1$, $|u(f_N)| = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} \to 2$, $\sup |u(f)| = 2$
$f \in S(0,1)$

Si $|||u|||$ est atteinte, il existe f $\|f\|_\infty = 1$ et

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} f\left(\frac{1}{2^n}\right) = 2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 - (-1)^n f\left(\frac{1}{2^n}\right)\right) = 0$$

TFNP : $\forall n\, f\left(\frac{1}{2n}\right) = (-1)^n$, donc f n'est pas $\mathcal{C}^0$ en 0

Application à la comparaison des normes
Soient N_1 et N_2 deux normes sur l'evn E

N_1 plus fine que N_2 $\iff \exists C > 0\ \forall x \in E\ N_2(x) \leq C N_1(x)$

$\iff id : (E, N_1) \to (E, N_2)$ est $\mathcal{C}^0$

$\iff \Big(\Omega$ ouvert de (E, N_2), $\Rightarrow Id^{-1}(\Omega) = \Omega$ ouvert $(E, N_1)\Big)$

Exercices :

① Soit ~~...~~ $u\ (E, \|\ \|_E) \to (F, \|\ \|_F)$ une AL

MQ u est $\mathcal{C}^0 \iff \{x \in E \,/\, \|u(x)\| = 1\}$ est fermé dans E

$\Downarrow$ $f : x \mapsto \|u(x)\|$ est $\mathcal{C}^0$, donc $\{f = 1\}$ est fermé.

composée : $u\ \mathcal{C}^0$, $\|\ \|\ \mathcal{C}^0$ $\Rightarrow \|u\|\ \mathcal{C}^0$

$\Uparrow$ Supposons u non continue : u n'est pas bornée sur $S(0,1)$: on dispose de $x_n \in S(0,1)^{\mathbb{N}}$ tq $\|u(x_n)\| \to \infty$

On pose $x'_n = \frac{x_n}{\|u(x_n)\|}$ (Apcr) il vient $\begin{cases} \|u'(x'_n)\| = 1 \\ \|x'_n\| = \frac{1}{\|u(x_n)\|} \to 0 \end{cases}$

$0 \notin \{x, \|u(x)\| = 1\}$ donc $A = \{x, \|u(x)\| = 1\}$, $A \neq \bar{A}$

donc A n'est pas fermé,

② Soit u un morphisme additif $E \to F$, borné sur $\overline{B}(0,1)$.
Montrer que u est linéaire et $\mathcal{C}^0$.

① $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\forall x \in E$ $f(nx) = nf(x)$

② $\forall r \in \mathbb{Q}$ $\forall x \in E$ $f(rx) = rf(x)$

On montre que f est bornée sur les boules $\overline{B}(0,r)$
$= r\overline{B}(0,1)$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $r_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tq $r_n \to \lambda$

$(r_n - \lambda)x \to 0$ donc, si $p \in \mathbb{N}^*$ il existe un rang

n_p tq $\forall n \geq n_p$ $(r_n - \lambda)x \in \overline{B}(0, \frac{1}{p}) = \frac{1}{p}\overline{B}(0,1)$

Alors $\|u((r_n - \lambda)x)\| \leq \frac{M}{p}$ | $r_n u(x) \to u(\lambda x)$

$\|r_n u(x) - u(\lambda x)\| \leq \frac{M}{p}$ | $\to \lambda u(x)$

Exo Soit $u : E \to \mathbb{R}$. Mq u est continue $\Updownarrow$ $\mathrm{Ker}\, u$ est fermé

① $\Leftarrow$ ⇑ ~~⇓~~ Si $u \neq \{0\}$, $H = \mathrm{Ker}\, u$ est un hyperplan et u surjective
Clon

Il existe $a \in E$ tq $u(a) = 1$

Alors $u(x) = 1 \Leftrightarrow u(x-a) = 0 \Leftrightarrow x \in a + H$ fermé car $x \mapsto a+x$ bornée

~~$F = (a+H)$~~ $u(x) = -1 \Leftrightarrow x \in -a + H$ fermé
$F = (a+H) \cup (-a+H)$ est alors fermé

Topologie, suite

et $0 \notin F$ $(\exists r>0)$ $(\overline{B}(0,r) \cap F) = \emptyset$

Mq $\forall x \in \overline{B}(0,r)$, $|u(x)| \leq 1$

ABS si $\left| \begin{array}{l} x \in \overline{B}(0,r) \\ u(x) > 1 \end{array} \right.$ $\quad x_\lambda = \lambda x$, $\lambda \in [0,1]$
$u(x_\lambda) = \lambda u(x) = 1$ si $\lambda = \frac{1}{u(x)}$

On $\|x_\lambda\| \leq \|x\| \leq 2$, donc $\overline{B}(0,1) \cap F \neq \emptyset$, absurde.

[

(CC)

Ex: Soit X un e.m compact $\neq \emptyset$, $E = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ munie de $\| \|_\infty$

a- Soit u une forme linéaire de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$
On suppose $\forall f \in E$ $f \geq 0 \Rightarrow u(f) \geq 0$. Mq u est $\mathcal{C}^0$, norme $|||u|||$

b- Soit $X : E \to \mathbb{R}$ un isomorphisme d'anneau unitaire
Mq X est continue

S/ a- positivité $\Rightarrow$ encadrements
Si $f \geq g$, $f-g \geq 0 \Rightarrow u(f-g) \geq 0 \Rightarrow u(f) \geq u(g)$

Soit $f \in E$ on a $-\|f\|_\infty 1_X \leq f \leq \|f\|_\infty 1_X$

$$-\|f\|_\infty \underbrace{u(1_X)}_{C} \leq u(f) \leq \|f\|_\infty \underbrace{u(1_X)}_{C}$$

$\forall f \in E \quad |u(f)| \leq C \times \|f\|_\infty$

Norme : $|||u||| \leq C$ et $C = u(\mathbb{1})$ d'où l'égalité

b- Soit $f \in E$, $f \geq 0$. Soit $g = \sqrt{f}$, $g \in E$, $g^2 = f$ et $X(f) = X(g^2)$

On applique a)

Formes bilinéaires continues.

Th : Soient E, F, G trois evn, $\varphi : E \times F \to G$ une forme bilinéaire

S'il existe $C > 0$ tq $\forall (x,y) \in E \times F$, $\|\varphi(x,y)\|_G \leq C \|x\|_E \|y\|_F$

alors φ est $\mathcal{C}^0$

D/ $\|\varphi(x,y) - \varphi(a,b)\| = \|\varphi(x-a, y) + \varphi(a, y-b)\|$

$\leq \|y\| \leq \|b\| + 1 \quad \leq C(\|x-a\| \|y\| + \|a\| \|y-b\|)$

$\|x-a\|(1 + \|b\|) + \|a\| \|y-b\| \leq (\|a\| + \|b\| + 1) C \times \max(\|x-a\|, \|y-b\|)$

Au voisinage de (a,b), φ est lip.

Intermède : Soit $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{K})$ g intégrable f, g ... $\Big| \forall x \int_x^{+\infty} fg \geq f(x)$

Mq $f = 0$

S/ $\forall x \in \mathbb{R}^+$ par positivité de fg $\int_0^{+\infty} fg \geq \int_x^{+\infty} fg \geq f(x) \geq 0$

Donc f est bornée

On pose $\mu(x) = \sup_{t \geq x} f(t)$, $f(x) \leq \mu(x) \int_x^{+\infty} g \to 0$